Proceedings of IAM, V.3, N.1, 2014, pp.47-79

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТРУКТУРНО-РАЗМЫТЫХ СИСТЕМ*

К.С.Иманов[1]

[1]Агентство по Авторским Правам Азербайджанской Республики, Баку, Азербайджан
e-mail: mha@copag.gov.az

Резюме. На основе четкой пятносновной алгебраической модели вводится понятие структурной системы. Исследуется способ ее размывания, определяемый прикладными задачами и обосновывается понятие структурно-универсальной системы с размытыми индивидуальными состояниями. Получен способ структуризации размытой алгебраической модели и проанализированы ее модификации. Обсуждаются прикладные задачи, вытекающие из основной постановки.

Ключевые слова: структурно-размытая система, структурно-универсальная система, размытые отображения отношения, графы.

AMS Subject Classification: 03A52, 03E72**.**

1. Введение

В проектировании систем прогнозирования социальных процессов, описании организационных структур и социальных групп, принятии решений в сложных производственных системах и ряде других задач возникает необходимость алгебраического описания перечисленных систем. В большинстве случаев подобные системы оказываются слабо структурированными и плохо описанными, причем описание условий, целей и возможностей их недостаточно идентифицируется. В частности подобная проблема возникает и в авторско-правовой среде при описании взаимодействия ряда социальных групп в Интернете. Основными авторско-правовыми акторами Интернет-сообщества в агрегированном представлении выступают Пользователи (Потребители) интеллектуальной продукции, размещенной в глобальной сети, Авторы, создавшие творческие результаты и передавшие свои интеллектуальные права третьим лицам, Правообладатели, располагающие исключительными правами и являющиеся производителями товаров и услуг с объектами интеллектуальной собственности, а также Провайдеры, обеспечивающие доступ в сети.

Руководствуясь своими собственными интересами, перечисленные социальные группы в качественной, лингвистической форме, вступая во

* Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанкой Республики – Грант № EİF-RİTN-MQM-2/İKT-2-2013-7(13)-29/26/1

взаимоотношения, определяют важнейшие показатели, порожденные миграцией авторского права в Интернет, а именно уровень обеспечения авторского права и уровень открытости (доступности) в Интернет-сети.

Переходя к общему описанию подобных систем, отметим их характерные компоненты:

- элементы $x \in X$, интерпретируемые как всевозможные компоненты системы (элементы, социогруппы, подразделения, индивиды и др.);
- элементы $c \in C$, интерпретируемые как всевозможные каналы взаимодействия между компонентами системы $x \in X$ (в частности, наборы показателей для оргсистем или экспертные оценки взаимодействия);
- отображения $\varphi \in \mathrm{M}$, представляющие собой указатели конкретных связей между элементами $x \in X$ или структуры;
- элементы $\gamma \in \Gamma$, интерпретируемые как стоящие перед системой цели (задачи).

Наряду с этим в системах могут задаваться операторы соответствия структур $\varphi \in \mathrm{M}$ требуемым целям $\gamma \in \Gamma$.

В статье исследуются вопросы:

1. Как на базе теоретического четкого описания системы представить ее размытую (нечеткую) модель?
2. Как структурировать полученную размытую алгебраическую модель?
3. Как представляются структурно-размытые модели?
4. Какие возникают модификации размытой модели системы и какова их интерпретация?

2. Определение четкой системы

Модель четкой системы принимается в виде алгебраической пятерки:

$$S = \langle X,\ \mathcal{C},\ \mathcal{M},\ \Im,\ \alpha \rangle,$$

где: а) X - непустое множество; б) $\mathcal{C} = \langle c, \vee, \wedge \rangle$ - полная дистрибутивная решетка (каждая из операций $\vee, \wedge$ индуцирует один и тот же частичный порядок $\preccurlyeq$[†]);

в) $\mathcal{M}$ - полная подрешетка полной дистрибутивной решетки $\mathcal{V}(X, \mathcal{C}) = \left\langle V(X, \mathcal{C});\ \overset{\vee}{\vee},\ \underset{\vee}{\wedge} \right\rangle$ с носителем $V(X, \mathcal{C}) = \left\{ \varphi | \varphi : X^2 \to C \right\}$ и

[†] Неструктурированные множества обозначаются печатными латинскими буквами, структурированные (в частности, алгебры и упорядоченные множества) – рукописными; при этом носитель структурированного множества $\mathcal{A}$ обозначен соответствующей печатной буквой A. Естественный порядок обозначен через $\leq$, а порядки на множествах нечисловой природы другими знаками или греческими буквами.

операциями, поточечно индуцированными соответствующими операциями решетки C; частичный порядок $\preccurlyeq \mathsf{V}$ также возникает поточечно из $\preccurlyeq$, причем он задает те же операции $\overset{\mathsf{V}}{\vee}$, $\underset{\mathsf{V}}{\wedge}$;

г) $\Im = \langle \Gamma, *, \rho \rangle$ - решеточно упорядоченная полугруппа с полугрупповой операцией * и стабильным относительно нее частичным порядком ρ (индуцирующим решеточные операции $\overset{\Im}{\vee}$, $\underset{\Im}{\wedge}$);

д) $\alpha \in Hom\left(\Im, \mathsf{H}(\widetilde{\mathsf{M}})\right)$ - гомоморфизм из $\Im$ в решеточно-упорядоченную полугруппу $\mathsf{H}(\widetilde{\mathsf{M}}) = \left\langle H(\widetilde{\mathsf{M}}), \circ, \rho_{\mathsf{H}} \right\rangle$ всех эндоморфизмов частично упорядоченного множества $\widetilde{\mathsf{M}} = \langle \mathsf{M}, \preccurlyeq \mathsf{V} \rangle$, где полугрупповой операцией служит операция $\circ$ композиции отображений и стабильный относительно $\circ$ решеточный частичный порядок ρ_{H} (а следовательно, и решеточные операции $\overset{\mathsf{H}}{\vee}$, $\underset{\mathsf{H}}{\wedge}$) «поточечно» индуцируется с помощью $\preccurlyeq \mathsf{V}$ (кавычки использованы, т.к. здесь «точками» будут отображения $\varphi \in \mathsf{M}$); таким образом α задает представление абстрактной решеточно-упорядоченной полугруппы $\Im$ в функциональную решеточно-упорядоченную полугруппу $H(\widetilde{\mathsf{M}})$ [3, 4].

С учетом введенных обозначений дадим пояснения.

а) Функционирование системы понимается как ее настройка на решение задач (считаем, что решением задач занимается «решатель»). Таким образом, в процессе функционирования под влиянием $\gamma \in \Gamma$ происходит изменение структур системы.

б) Гомоморфизм α понимается как внутренняя, регулируемая системой, компонента совокупного влияния задач на выбор необходимых подмножеств множества M всех состояний системы. Внешней, нерегулируемой системой, компоненте соответствует другой гомоморфизм $\beta : \Im \to \mathsf{H}(\widetilde{\mathsf{M}})$. Таким образом, полное влияние задач описывается парой $\delta = (\alpha, \beta)$ этих гомоморфизмов: $\delta(\gamma) = \alpha(\gamma) \overset{\mathsf{H}}{\vee} \beta(\gamma)$, где $\gamma \in \Gamma$ и $\alpha(\gamma) \overset{\mathsf{H}}{\vee} \beta(\gamma)$ - решеточная сумма эндоморфизмов $\alpha(\gamma), \beta(\gamma)$.

в) Удобно, хотя и не обязательно, отожествлять каналы связи $c \in C$ с пропускаемой через них информацией: канал $c \in C$ отожествляется с информацией, которая может через него быть пропущена $Inf(c)$ (множество информационных векторов – наборов показателей). Неравенство $c_1 \preccurlyeq c_2$

понимается как теоретико-множественное включение $Inf(c_1) \subseteq Inf(c_2)$, а равенство $\varphi(x, y) = c$ - как в состоянии системы φ компонента x требует от компоненты y представить информацию $Inf(c)$. Порядок ρ - как отношение вынуждения между задачами, а полугрупповое произведение $\gamma_1 * \gamma_2$ ($\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$) как задача, состоящая в последовательном решении этих задач. Наконец, эндоморфизм $\delta(\gamma) = \alpha(\gamma) \overset{\text{H}}{\vee} \beta(\gamma)$ понимается как выбор множества тех состоянии системы, которые необходимы для задачи $\gamma \in \Gamma$.

В силу такой интерпретации каналов связи и отношения $\preccurlyeq$ между ними требование дистрибутивности решетки C осуществимо: частично упорядоченное множество $\langle \mathsf{C}; \preccurlyeq \rangle$ реализовано как подмодель частично упорядоченного множества $\left\langle 2^I; \subseteq \right\rangle$ и, если C окажется недистрибутивной, мы можем перейти от C к подрешетке, порожденной множеством C в булеане $\left\langle 2^I; \bigcup; \bigcap \right\rangle$, которая уже дистрибутивна, как подрешетка дистрибутивной решетки $\left\langle 2^I; \bigcup; \bigcap \right\rangle$.

г) Для охвата прикладных ситуаций, по-видимому, достаточно считать множество X и решетку C конечными. Отсюда следует также конечность решетки $\mathsf{V}(X, \mathsf{C})$, а следовательно и ее подрешетки M и полнота всех трех решеток $\mathsf{C}, \mathsf{V}(X, \mathsf{C}), \mathsf{M}$. Всюду в дальнейшем их конечность предполагается.

Представленное четкое описание системы есть ее структурный разрез, а именно предметом исследования является перестройка структурных связей системы под влиянием решаемых задач. В отличие от этого подхода функциональный разрез системы предполагает ее элементы в виде решающих, что в настоящей работе не рассматривается и является предметом отдельного исследования [1, 2].

3. Стратегия размывания системы

В связи с тем, что у реальных систем «контуры» большинства ее параметров и их составных частей усматриваются лишь весьма приближенно, возникает необходимость формирования понятия «размытая система». Разумеется, возможны различные варианты размывания. Принимается, что размывание осуществляется в традиционной шкале $\langle [0, 1]; \leq \rangle$. Порождаемые размытые системы по аналогии именуются структурно-размытыми системами.

Для аргументированного выбора стратегии размывания необходимо осмыслить, какие из неопределенностей в функционировании реальных систем являются устранимыми, а какие принципиально неустранимы.

Рассмотрим эмпирический уровень описания, обосновывающий размывание.

Внесем предположения, которые исключают необходимость размывания параметра M - решетки состояний системы, являющейся подрешеткой в «универсальной» (при фиксированных X и C) решетке $\mathsf{V}(X,\mathsf{C})$. Трактуя $\varphi \in \mathsf{V}(X,\mathsf{C})$ как индивидуальные состояния системы, размытость M будем понимать, как размытость множества неразмытых индивидуальных состояний в универсуме всевозможных неразмытых состояний (при фиксированных X и C). В этом случае размытость M можно устранить путем привлечения избыточных состояний, хотя бы, к примеру, полагая всегда, что $\mathsf{M} = \mathsf{V}(X,\mathsf{C})$.

Также (временно) внесем предположения нецелесообразности размывания гомоморфизма α и множества задач $\mathfrak{I}$. Для этого допустим, что система «хорошо организована», и потому гомоморфизм α, будучи реакцией системы S на стоящую перед ней задачу γ, отражает качество перестройки состояний системы. В подобном случае будем исходить из того, что «хорошо организованная» система является системой, обеспеченной группой экспертов с высокой коллективной надежностью рекомендаций по перестройке структуры системы. Следовательно, для «хорошо организованных» систем размывание α не рассматривается.

Наконец, допустим, что наряду с «реальным» временем, в котором «живет» система, рассматриваются два вида условного времени: дискретное макровремя и дискретное микровремя, где момент макровремени равен некоторому отрезку микровремени, а момент микровремени равен некоторому отрезку реального времени, изменяющегося на вещественной оси. Пусть в каждый момент микровремени перед системой стоит единственная задача и, следовательно, в каждый момент макровремени – фиксированное множество задач. Условное время полезно с точки зрения позадачной развертки функционирующей системы.

Для каждой системы S в каждый момент дискретного микровремени существует граница $\mathfrak{I}$-определенности – некоторый более поздний момент макровремени $T(t_0)$ такой, что абсолютно точно известны: список $\Gamma_0 = \Gamma(t_0, T(t_0))$ всех задач, которые возникнут перед S в моменты макровремени $t \in \{t_0, t_0+1, \ldots, T(t_0)\}$ его подмножество $\Gamma_0^э \subseteq \Gamma_0$, состоящее из элементарных задач, отношение вынуждения $\rho_0 \subseteq \Gamma_0 \times \Gamma_0$ и таблица полугрупповой операции

$$*_0 : \Gamma_0 \times \Gamma_0 \to \Gamma_0 \setminus \Gamma_0^{э}$$

где ($\Gamma_0 \setminus \Gamma_0^{э}$) – подмножество неэлементарных задач из Γ_0, и на парах из ρ_0 операция $*_0$ индуцируется отношением ρ_0, а вариации возможны лишь на остальных парах из $\Gamma_0 \times \Gamma_0$.

Множество $\{t_0, t_0 + 1, ..., T(t_0)\} = [t_0, T(t_0)]$ назовем отрезком $\Im$-определенности системы S в момент макровремени t_0 и будем понимать под отрезком $\Im$-определенности S ее отрезок $\Im$-определенности в какой-то момент t_0. Ясно, что на каждом фиксированном отрезке $\Im$-определенности системы S множество X и решетку C можно считать также абсолютно точно известными и неизменяющимися в пределах этого отрезка: компонент системы и ее каналов связи можно «набрать» с большим запасом – так, чтобы их хватило и на все задачи $\gamma \in \Gamma_0$, и на реализацию дистрибутивности решетки каналов связи. Таким образом из эмпирических соображений мы получаем нецелесообразность размывания M, α, $\Im$, а по существу также и X и C.

Вместе с тем, учитывая важность правильной стратегии размывания, подробнее остановимся на эмпирических аспектах размывания системы, исходя из соответствующих прикладных ситуаций.

1. Эмпирически недостаточно идентифицированная на элементном уровне система. Предполагается, что на универсуме X задано размытое множество X_f с функцией принадлежности $\mu_{X_f} : X \to [0, 1]$.
2. Эмпирически недостаточно идентифицированная на уровне видов информационного обмена система. Предполагается, что на универсуме C задано множество C_f с функцией принадлежности $\mu_{\mathsf{C}_f} : \mathsf{C} \to [0, 1]$.
3. Эмпирически недостаточно идентифицированная на уровне связей между элементами система. Предполагается задание размытого отображения $\varphi : X^2 \to \mathsf{C}$.
4. Возможны комбинации первых трех вариантов нечеткости, а именно:
   4а) X и C - размытые;
   4б) X и φ - размытые;
   4в) C и φ - размытые;
   4г) X, C, φ - размытые.

Пронумеруем элементы универсумов $X = \{x_1, ..., x_n\}$ и $\mathsf{C} = \{c_1, ..., c_m\}$. Тогда, если X_f - размытое множество на X, т.е. $\mu_{X_f} : X \to [0, 1]$ получим:

$$X_f = \left(\frac{\mu_1}{x_1}, \ldots, \frac{\mu_n}{x_n} \right) = (\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_n).$$

Аналогично, если $\mu_{C_f} : C \to [0, 1]$, то размытое множество есть

$$C_f = \left(\frac{\mu_1}{c_1}, \ldots, \frac{\mu_m}{c_m} \right) = (\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_m).$$

Декартово произведение

$$X_f \times X_f = X_f^2 = \left(\frac{\mu_i}{x_i}, \frac{\mu_j}{x_j} \right) = \left(\tilde{\mu}_i, \tilde{\mu}_j \right), \qquad (i, j = \overline{1, n}).$$

Обозначив для упрощения $X \times X = Z$ и $X_f \times X_f = Z_f$, запишем: $Z_f = X_f \times X_f = \left\{ \left(\tilde{\mu}_i, \tilde{\mu}_j \right) \right\}$, где:

$$\mu(z_{ij}) = \left(\tilde{\mu}_i \wedge \tilde{\mu}_j \right); \quad \mu_{Z_f} = \left(\tilde{\mu}_i \wedge \tilde{\mu}_j \right), \quad z_{ij} = \left(x_i, x_j \right)$$

$\mu(z_{ij}) = \left(\tilde{\mu}_i \wedge \tilde{\mu}_j \right)$ для удобства будем обозначать в виде $\mu_{Z_f}(z)$ и читать: $\mu_{Z_f}(z)$ есть функция принадлежности элемента $z = \left(x_i, x_j \right)$ размытому множеству Z_f.

Рассмотрим случай 1 эмпирически недостаточно идентифицированную на элементном уровне систему. Тогда

$$\begin{matrix} Z \\ \circlearrowleft \\ Z_f \end{matrix} \xrightarrow{\varphi} C$$

В этом случае, согласно принципу обобщения Заде образ размытого множества Z_f на C является размытым подмножеством множества C и представляет совокупность пар вида:

$$\left(c, \mu_{C_f}(c) \right) = \left(\varphi(z), \mu_{Z_f}(z) \right),$$

где $\mu_{C_f} : C \to [0, 1]$ - функция принадлежности образа, равная:

$$\mu_{C_f}(c) = \begin{cases} \bigcup\limits_{z \in \varphi^{-1}(c)} \mu_{Z_f}(z), & \text{если} \quad \varphi^{-1}(c) \neq \varnothing \\ 0, & \text{если} \quad \varphi^{-1}(c) = \varnothing \end{cases}$$

$$\varphi^{-1}(c) = \{ z \mid z \in Z, \ \varphi(z) = c \}.$$

Следовательно, если при формировании структуры есть нечеткость (отсутствует определенность) в элементном составе, то последнее влечет нечеткость (неопределенность) видов информационного обмена.

Возникающая неопределенность интерпретируется следующим образом: если точно неизвестно какие именно компоненты $x \in X$ участвуют в данной ситуации, то компоненты «плохо знают» и о том, что какую именно информацию следует запросить. В данной ситуации неопределенность в носителях связи порождает неопределенность в видах связи [5, 6].

Рассмотрим случай 2, когда изучается недостаточно идентифицированная на уровне типов информационных связей система. Тогда:

$$Z \xrightarrow{\varphi} \begin{matrix} \mathsf{C} \\ \cup \\ \mathsf{C}_f \end{matrix}$$

В этом случае вводится прообраз Z_f размытого множества C_f в C при отображении φ, определяемый функцией принадлежности $\mu_{Z_f}(z) = \mu_{\mathsf{C}_f}(\varphi(z)) \quad \forall z \in Z$.

Тем самым прообраз Z_f на универсуме Z представляет собой размытое множество с функцией принадлежности $\mu_{Z_f}(z)$, совпадающей с функцией принадлежности $\mu_{\mathsf{C}_f}(c) = \mu_{\mathsf{C}_f}(\varphi(z))$.

Данный случай интерпретируется следующим образом: если типы информационных связей заранее «плохо» известны, то оказываются «плохо» известными и компоненты, вступающие во взаимосвязи (неопределенность типов информационных связей порождает неопределенность в носителях этих связей).

Рассмотрим случай 3, представляемый недостаточно идентифицированной на уровне связей между элементами системой. Тогда: $Z \xrightarrow{\varphi_f} \mathsf{C}$. В этом случае размытое отображение φ_f каждому элементу $z \in Z$ ставит в соответствие, вообще говоря, размытое подмножество множества C. Неясная природа φ_f позволяет представить это отображение в виде $\mu_\varphi : Z \times \mathsf{C} \to [0, 1]$ так, что функция $\mu_\varphi(z_0, c)$ при фиксированном $z = z_0$ есть функция принадлежности размытого множества в C, которое представляет собой размытый образ z_0 при данном отображении.

Вследствие этого совокупный размытый образ на C является совокупностью размытых образов фиксированных $z \in Z$ [7]. Отметим также, что из-за неясной природы φ_f вводятся размытые подмножества прямого произведения $Z \times \mathsf{C}$, т.е. данные вида $\{(Z_i, \mathsf{C}_i)\}$, где $i = \overline{1, n}$, Z_i, C_i - размытые соответственно на Z и C подмножества при действии обычного отображения φ. Если же φ не существует, то можно строить размытое отношение R на $Z \times C$, используя для этого отношения R_i размытых гранул $Z_i \times C_i$ (Z_i, C_i - размытые нормализованные множества) [8, 9]. Возникшая неопределенность интерпретируется в следующем виде: неопределенность информационного взаимодействия порождает неопределенность в носителях связи и типах информационного обмена.

Рассмотрим случай 4, представляющий комбинации рассмотренных выше размытостей. Если рассматривается вариант 4а)

$$Z \xrightarrow{\varphi_f} \begin{matrix} C \\ \cup \\ C_f \end{matrix},$$

то его анализ следует непосредственно из случая 3, будучи его развитием, а именно, для каждого фиксированного $z_0 = z$ из Z размытое отображение φ_f рождает размытое подмножество C'_f размытого множества C_f. Таким образом размытый образ Z на C_f в силу отображения φ_f есть совокупность размытых подмножеств C'_f каждого фиксированного $z_0 = z \in Z$ на размытом множестве C_f. Тем самым формируется размытость II рода.

Вариант 4б)

$$\begin{matrix} Z \\ \cup \\ Z_f \end{matrix} \xrightarrow{\varphi} C$$

представляет образ размытого множества Z_f при размытом отображении $\mu_\varphi : Z \times C \to [0, 1]$ как размытое множество с функцией принадлежности $\mu_{C_f}(c) = \vee_z \left(\mu_{Z_f}(z) \wedge \mu_\varphi(z, c)\right)$.

Полагая $\mu_{Z_f}(z)$ в качестве унарного отношения на Z получим для C_f массиминную композицию размытых отношений Z_f и μ_φ

$$C_f = Z_f \circ \mu_\varphi .$$

Вариант 4в)

$$\begin{matrix} Z \\ \cup \\ Z_f \end{matrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{matrix} C \\ \cup \\ C_f \end{matrix}$$

приводит в соответствии с принципом обобщения Заде к

$$\mu_{C_f}(c) = \begin{cases} \underset{z \in Z}{\cup} \mu_{Z_f}(z), & \textit{если} \quad \varphi^{-1}(c) \neq \varnothing \\ 0, & \textit{если} \quad \varphi^{-1}(c) = \varnothing \end{cases}$$

и таким образом $\mu_{C_f}(\varphi(z)) \geq \mu_{Z_f}(z)$ при ограничении $c = \varphi(z)$.

Вариант 4г)

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\varphi_f} & C \\ \cup & & \cup \\ Z_f & & C_f \end{array}$$

приводит к математическому объекту, когда образ размытого множества μ_{Z_f} будет являться размытым подклассом (за счет μ_φ) класса всех размытых подмножеств размытого множества C_f, т.е. к размытости II рода [10]. Для согласования μ_{Z_f}, μ_{C_f}, μ_φ в этих случаях полезно вводить размытое отношение R_f в виде:

$$C_f = Z_f \circ R_f .$$

Рассмотрение различных случаев эмпирического уровня размывания системы позволяет сделать ряд выводов:

1) Из вариантов нечеткости 1, 2, 3 наиболее общим является случай 3 с заданием размытого отображения $\varphi_f : Z \to C$. Именно в этом случае возникает необходимость изучения $Z \times C \to [0, 1]$, возникают размытые гранулы $Z_i \times C_i$ из $Z \times C$, обеспечивающие восстановление «части» связи в виде обычных (неразмытых φ_i), из которых «строится» обычное φ.

Т.о. нечеткость случая 3 покрывает случаи 1 и 2.

2) Вариант 4в) также непосредственно следует из случая 3, когда неясная природа φ приводит к выделению размытых подмножеств Z_f и C_f на Z и C и исследованию действия обычного отображения φ между Z_f и C_f.

3) Варианты 4а), 4б) и 4г) являются развитием случая 3, причем наиболее важным случаем будет вариант 4г), приводящий к введению размытого отношения R_f, такого, что $C_f = Z_f \circ R_f$.

4) Принципиальная важность и общность случая, когда φ - размытое отображение предопределено и такими соображениями:
- даже при хорошо известном φ возникает необходимость его грубого описания;

- за счет неточности измерения $z \in Z$ и $c \in C$ доступность описания φ, когда Z и C задаются в виде размытых множеств измерения (наблюдения);
- φ может быть и не истинным отображением и в системе могут существовать неучтенные факторы, влияющие на φ.

В связи с изложенным, в результате рассмотрения прикладных ситуаций эмпирического уровня размывания системы, убеждаемся, что наиболее важная и трудноустранимая неопределенность связана с размытостью φ и развитием этого случая. По этой причине φ, характеризуя структуру системы, и будучи ее индивидуальным состоянием, принимается размытым и тем самым неопределенность в информационных связях порождает неопределенность элементного состава и неопределенность видов информационных взаимодействий системы.

4. Алгебраическая модель размытой системы

Размытые индивидуальные состояния системы S приводят к образованию «универсального» при фиксированных X и C множества $V_f(X, C)$ размытых состояний. Это позволяет отразить наиболее существенную неопределенность в функционировании системы (причем – даже «хорошо организованной» в указанном выше смысле и рассматриваемой лишь на отрезках своей $\Im$-определенности), а именно, компонента $x \in X$ «плохо» знает в каких ситуациях она должна запрашивать у других компонент $y \in X$ информацию; у каких именно компонент следует запрашивать в данной ситуации; какую именно информацию следует в данной ситуации запросить у данной компоненты.

Таким образом возникшая неопределенность есть размытость каждого индивидуального состояния системы в универсуме всевозможных неразмытых состояний. При этом оказывается возможным до точного определения понятия «размытое состояние» указать априорные ограничения на способ структуризации множества «размытых состояний».

Отметим, что размытое подмножество в $Z \times C$, удовлетворяющей условию, имитирующему аксиому функциональности, есть размытое состояние.

Имитация аксиомы функциональности заключается в том, что отображение $\mu^z : C \to [0, 1]$ принимает максимальное значение в единственной точке $c(\mu^z) \in C$ (которая существует в силу конечности C). Имитацию аксиомы функциональности можно представить нижеследующим образом.

Будем рассматривать размытое состояние как нечеткое соответствие в виде $\Gamma=\left(Z, \mathrm{C}, R_{\varphi}\right)$, где R_{φ} нечеткий график соответствия (здесь Z, C - имеют прежний смысл и четкие, а R_{φ} - нечеткое подмножество в $Z \times \mathrm{C}$).

φ можно рассматривать как размытое отображение, при котором каждому элементу $z \in Z$ ставится в соответствие нечеткое подмножество множества C. При этом функция $\mu_{\varphi}: Z \times \mathrm{C} \rightarrow [0, 1]$, есть такая, что функция $\mu_{\varphi}\left(Z_0, \mathrm{C}\right)$ (при фиксированном Z_0) есть функция принадлежности нечеткого множества в C и представляющая собой нечеткий образ элемента Z_0 при данном отображении.

Итак, искомое понятие – «универсальная система с размытыми состояниями» - пятерка $S_f^{*}=\left\langle X, \mathrm{C}, \left\langle \mathrm{V}_f(X, \mathrm{C})\right\rangle\right\rangle=\left\langle\left\langle V_f(X, \mathrm{C})\right\rangle ; \langle ? \ldots ?\rangle, \Im, \alpha\right\rangle$, где $X, \mathrm{C}, \Im$ имеют прежний смысл; $\mathrm{V}_f(X, \mathrm{C})$ - результат наделения множества $V_f(X, \mathrm{C})$ всех размытых состояний такой сигнатурой $\langle ? \ldots ?\rangle_{\mathrm{V}_f}$, при которой имеют смысл гомоморфизмы

$$\alpha, \beta \in Hom\left(\Im, \mathrm{H}\left(\mathrm{V}_f(X, \mathrm{C})\right)=\left\langle H\left(\mathrm{V}_f(X, \mathrm{C})\right) ; \langle\circ, ?\rangle\right\rangle\right).$$

Очевидно, что сигнатура $\langle\circ, ?\rangle$ наполовину известна, так как во множестве $H\left(\mathrm{V}_f(X, \mathrm{C})\right)$ всех эндоморфизмов математической структуры $\mathrm{V}_f(X, \mathrm{C})$ имеется операция композиции $\circ$, соответствующая полугрупповой операции $*$ в $\Im$.

Конкретнее, отображения $\alpha, \beta: \Gamma \rightarrow H\left(\mathrm{V}_f(X, \mathrm{C})\right)$ должны в силу гомоморфности согласовывать сигнатуру $\langle *, \preccurlyeq \Im\rangle$, где $(\preccurlyeq \Im=\rho)$, решеточно упорядеченной полугруппы $\Im$ с сигнатурой $\langle\circ, ?\rangle$ объекта $\mathrm{H}\left(\mathrm{V}_f(X, \mathrm{C})\right)$. Для того, чтобы это согласование имело смысл, необходимо подставить в $\langle\circ, ?\rangle$ вместо вопросительного знака некоторое бинарное отношение

$$\sigma_{\mathrm{H}} \subseteq H\left(\mathrm{V}_f(X, \mathrm{C})\right) \times H\left(\mathrm{V}_f(X, \mathrm{C})\right).$$

Помня, что в неразмытом варианте порядок ρ_{H} «поточечно» индуцировался посредством $\preccurlyeq \mathrm{V}$, мы в новой ситуации должны стремиться реализовать «поточечную» индуцируемость σ_{H} посредством подходящего, но пока неизвестного бинарного отношения

$$\sigma_{\mathrm{V}_f} \subseteq V_f(X, \mathrm{C}) \times V_f(X, \mathrm{C}).$$

Итак, для осмысленности гомоморфизмов α, β достаточно (а в некотором смысле и необходимо), чтобы сигнатура $\langle ?...? \rangle$ состояла из одного бинарного отношения σ_{V_f} .

Далее, принимая во внимание, что в неразмытом варианте выполнялись условия а), б), в), т.е.

а) отношение $\rho_{\mathcal{H}}$ было стабильным относительно $\circ$,

б) отношение $\preccurlyeq \mathsf{V}$ (а следовательно и «поточечно» индуцированное им отношение $\rho_{\mathcal{H}}$) было решеточным порядком,

в) решеточный порядок $\preccurlyeq \mathsf{V}$ поточечно индуцировался посредством $\preccurlyeq$ (порядка решетки C),

будем стремиться сохранить в размытом варианте как можно больше аналогов этих связей, ибо в противном случае размывание окажется чисто формальным, т.е. абсолютно не связанным с исходной ситуацией.

Для гарантированности стабильности σ_{H} относительно $\circ$ выберем σ_{H} «поточечно» индуцирующимся посредством σ_{V_f} (эта стабильность легко проверяется, причем конкретный вид никакой роли не играет).

Таким образом переход к размытому варианту сохранит условие а). Для сохранения связей б) и в) σ_{V_f} будет подбираться так, чтобы:

б′) оно оказалось не слишком далеким по своим свойствам от решеточных порядков и тем более не оказалось совершенно произвольным бинарным отношением без каких-либо полезных свойств;

в′) оно коррелировало с порядком $\preccurlyeq$ решетки C, причем, достаточно сильно коррелировало с $\preccurlyeq$, ибо поточечное индуцирование посредством $\preccurlyeq$, соответствующее максимально возможной корреляции с этим отношением нереализуемо по самой природе размывания (в результате размывания с необходимостью появится влияние числового порядка $\leq$ или какого-нибудь другого естественного отношения $\mathsf{H} \subseteq [0,1] \times [0,1]$).

Хотя мы еще не определили конкретный вид размытых состояний, тем не менее, они в любом варианте определения будут отображениями «чего-либо» в $[0,1]$ и поэтому всякий естественный выбор отношения σ_{V_f} должен хоть как-то коррелировать с некоторым естественным H (например, с $\leq$). По этой причине порядок $\overset{\circ}{\leq}$ на $V_f(X,\mathsf{C})$ поточечно индуцированный посредством $\leq$, не подходит в качестве σ_{V_f} , он абсолютно не коррелирует с $\preccurlyeq$.

Таким образом удается установить с соблюдением каких априорных ограничений должно структурироваться множество $V_f(X, \mathrm{C})$ всех размытых состояний.

Исходя из этого можно дать точное определение размытого состояния и тем самым снять вопросительный знак в схеме: размытое состояние есть отображение множества $\langle ?...? \rangle$ в $[0, 1]$, а затем конкретно задать σ_{V_f} и тем самым σ_{H}. Принимаем во внимание, что в неразмытом варианте состояния φ задавалось в виде отображения $\varphi : Z \to \mathrm{C}$ или, равносильным образом, в виде функционального бинарного отношения $R_\varphi \subseteq Z \times C$ (где: $\langle z, c \rangle \in R_\varphi \overset{def}{\Leftrightarrow} \varphi(z) = c$), для которого справедлива аксиома функциональности, т.е.

$$\left(\forall z \in Z\right)\left(\exists! c \in C\right) \langle z, c \rangle \in R.$$

По аналогии, естественно считать, что размытое состояние есть размытое подмножество в $Z \times C$, удовлетворяющее дополнительному условию, имитирующему аксиому функциональности.

Для упрощения удобно перейти от «целого» декартового произведения $Z \times C$ к его разбиению $\bigsqcup_{z \in Z} K_z(C)$ на «конусы» $K_z(C) = \left\{\langle z, c \rangle : c \in C\right\}$ (где $\bigsqcup$-дизъюнктивная сумма множеств). Для заданного функционального бинарного отношения $R \subset Z \times C$ и фиксированного $z \in Z$ через $c_z(R)$ обозначим тот единственный элемент $c \in C$, для которого выполняется $\langle z, c \rangle \in R$. Имеем $R = \left\{\langle z, c_z(R) \rangle : z \in Z\right\}$ и при фиксированном $z \in Z$ пересечение $R \cap K_z(C)$ состоит из единственной пары $\langle z\,,\, c_z\,(R) \rangle$. Таким образом, выбор функционального бинарного отношения $R \subset Z \times C$ равносилен выбору системы представителей из конусов $K_z(C)$ - по одному представителю из каждого конуса $K_z(C)$, $z \in Z$. С другой стороны, в силу фиксированности z в пределах конуса $K_z(C)$ выбор представителя в этом конусе равносилен выбору точки $c_z(R)$ в множестве C.

Таким образом, если определить понятие «размытая точка множества C», то «размытое состояние» будет семейством таких «размытых точек» - в количестве, равном числу элементов в Z (т.е. равном числу конусов). При определении «размытой точки множества C» мы используем усеченный (до каждого фиксированного конуса $K_z(C)$) вариант вышеупомянутой имитации аксиомы функциональности, а именно, мы назовем этим термином всякое отображение $\mu^z : C \to [0, 1]$, принимающее максимальное значение в единственной точке $c(\mu^z) \in C$ (среди всех значений функции μ^z в силу конечности C существует наибольшее, и поэтому такая точка $c(\mu^z)$ существует).

Такие функции μ^z удобно называть одногорбыми. На множестве всех одногорбых функций $\mu^z : C \to [0, 1]$ (при каждом фиксированном $z \in Z$) рассмотрим бинарное отношение σ^z, определив его посредством

$$\left\langle \mu_1^z, \mu_2^z \right\rangle \in \sigma^z \overset{def}{\Leftrightarrow} c(\mu_1^z) \preccurlyeq c(\mu_2^z) \,\&\, (\forall c \in C) \mu_1^z(c) \le \mu_2^z(c).$$

Непосредственно проверяется, что σ^z рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, т.е. является частичным порядком. Более того, этот частичный порядок является «кусочно-решеточным», а именно решеточным порядком будет сужение σ^z на множестве всех тех одногорбых функций μ^z, для которых $c(\mu^z)$ совпадает с фиксированной точкой $c \in C$ (и это верно для каждой фиксированной точки c).

Это множество одногорбых функций с фиксированным $c(\mu^z) = c$ запишем в виде:

$$\bigsqcup_{0<\alpha\le 1} \left(\{\alpha\} \times [0, \alpha]^{C \setminus \{c\}} \right),$$

а все множество одногорбых функций μ^z в виде:

$$\bigsqcup_{c \in C} \bigsqcup_{0<\alpha\le 1} \left(\{\alpha\} \times [0, \alpha]^{C \setminus \{c\}} \right).$$

Тогда искомое множество $V_f(X, \mathsf{C})$ всех размытых состояний запишется в виде:

$$V_f(X, \mathsf{C}) = \left(\bigsqcup_{c \in C} \bigsqcup_{0<\alpha\le 1} \left(\{\alpha\} \times [0, \alpha]^{C \setminus \{c\}} \right) \right)^Z,$$

а искомое отношение σ_{V_f} получится посредством «склейки» отношений σ^z (где $z \in Z$), т.е. для размытых состояний μ_1, μ_2 полагаем

$$\left\langle \mu_1, \mu_2 \right\rangle \in \sigma_{\mathsf{V}_f} \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall z \in Z) \left\langle \mu_1^z, \mu_2^z \right\rangle \in \sigma^z.$$

Легко проверить, что σ_{V_f} также является частичным порядком на множестве $V_f(X, \mathsf{C})$.

Таким образом выявляется вид искомого структурированного множества $\mathsf{V}_f(X, \mathsf{C})$, а именно это будет

$$\left\langle V_f(X, \mathrm{C}); \sigma_{\mathrm{V}_f} \right\rangle.$$

Следовательно, введенная алгебраическая модель структурно-универсальной системы S размытыми индивидуальными состояниями (коротко: структурно-размытой системы) представится в виде:

$$S_f^* \left\langle X, \mathrm{C}, \mathrm{V}_f(X, \mathrm{C}); \Im, \alpha \right\rangle.$$

5. Идентификация отображения φ (отношения R_φ)

Как следует из ранее изложенного, индивидуальные состояния (структуры) φ являются размытыми. Вместе с тем φ являются размытыми отображениями или, равносильно, размытыми отношениями R_φ. Возникает вопрос их спецификации, т.е. их информационного задания для описания системы S_f^*.

Для идентификации будем использовать лингвистическое описание системы в виде атомарных импликаций Z_i и C_i.

Рассмотрим два случая спецификаций, определяющих идентификацию $\varphi(R_\varphi)$, причем особо отметим, что эта работа проводится для фиксированных $\gamma \in \Im$.

а) Исходим из того, что φ, будучи размытым отображением, предполагает, что c зависит не только от z, но возможно и от каких-то других факторов.

Если по итогам наблюдения системы или ее экспертного описания в нашем распоряжении имеется множество точек (z_i, c_i), то становится целесообразным их уплотнение, в результате которого вводятся размытые множества прямого произведения $Z \times C$ типа $Z_i \times C_i$ $\left(i = \overline{1, N}\right)$ являющиеся гранулами [6, 8, 9]. Будем предполагать Z_i и C_i соответственно в Z и C как выпуклые, нормализованные размытые множества.

Допустим, что размытые множества Z_i и C_i являются невзаимодействующими и тогда, применяя принцип обобщения, получим:

$$\mu_{Z_i \times C_i}(z, c) = \left(\mu_{Z_i}(z) \wedge \mu_{C_i}(c)\right) \qquad \forall z \in Z \text{ и } c \in C.$$

Если бы размытые гранулы $Z_i \times C_i$ из $Z \times C$ объединялись в четкое отображение, существующее, по предположению, между Z и C, т.е. $\varphi : Z \to C$, то в силу принципа обобщения имеем:

$$\forall i, \ \forall c \quad \mu_{C_i}(c) = \bigcup_{z \in Z} \mu_{Z_i}(z)$$

при ограничении

$$c = \varphi(z) \Leftrightarrow \forall z, \qquad \mu_{C_i}(\varphi(z)) \geq \mu_{Z_i}(z).$$

При этом имеет смысл такая интерпретация: чем больше компонента принадлежит Z_i, т.е. чем более точно определены элементы в размытой структуре, тем больше c принадлежит C_i, т.е. тем более точно определяются типы информационного обмена в этой ситуации.

Если ввести α-уровни, то получим:

$$\forall \alpha \in]0,1], \quad z \in (Z_i)_\alpha \rightarrow \varphi(z) \in (C_i)_\alpha .$$

Обозначив через C_i носитель C_i и полагая, что каждая пара (Z_i, C_i) формирует свою часть φ_i, запишем:

$$\forall c \in C_i, \qquad \mu_{C_i}(c) = \bigcup_z \left(\mu_{Z_i}(z) \wedge \mu_{\psi_i(z)}(c)\right),$$

где

$$\mu_{\psi_i(z)}(c) = \begin{cases} 1, & \text{если } c = \varphi_i(z) \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Вместе с тем при таком способе восстановления размытого отображения, когда объединяются все части φ_i функции φ может оказаться, что такой φ_i не существует на носителе Z_i. Так, если $\exists z \in$ носителю Z_i и, если $\forall c \in$ носителю C_i, что $\mu_{C_i}(c) \neq \mu_{Z_i}(z)$ или φ_i определяется неоднозначно, приходится формировать размытое отношение R.

б) Допустим, что заданы размытые отношения R_i вида

$$\forall c \quad \mu_{C_i}(c) = \bigcup_{z \in Z} \left(\mu_{Z_i}(z) \wedge \mu_{R_i}(z, c)\right),$$

из которых надлежит найти размытое отношение R на $L \times C$ (Z_i и C_i - нормализованные, размытые множества).

Обозначим $R_i = Z_i \times C_i$, представляющую размытую гранулу. Используя максиминную композицию «$\circ$», получим:

$$C_i = Z_i \circ (Z_i \times C_i), \qquad Z_i = C_i \circ (Z_i \times C_i).$$

Последняя форма записи гранулы в виде прямого произведения $Z_i \times C_i$ подразумевает отсутствие причинно-следственных связей и подразумевает возможность единовременного появления «носителя» информационного обмена и вида информационного воздействия.

Сведем локальные отношения R_i в общее отношение R.

$$R = \bigcup_i Z_i \times C_i = \bigvee_i (Z_i \times C_i),$$

что обеспечивает возможность появления любой пары (Z_i, C_i) в спецификации.

Учитывая определенную причинно-следственную связь между Z_i и C_i, а именно, каждую атомарную импликацию для пары (Z_i, C_i) представляя в виде: «Если z есть Z_i, то c есть C_i», можно использовать различные способы определения R_i через многозначные импликации.

Так, $R_i = Z_i \wedge \mathrm{C}_i$, получим глобальное отношение $R = \vee_i (Z_i \wedge \mathrm{C}_i)$.

Можно [8] R_i определить в виде:

$$R_i^1(z,c) = ((1 - \mu_{Z_i}(z)) \vee \mu_{\mathrm{C}_i}(c)),$$

$$R_i^2(z,c) = (1 \wedge (1 - \mu_{Z_i}(z)) + \mu_{\mathrm{C}_i}(c)).$$

Глобальное отношение, определенное на $\{R_i^j\}$, $i = \overline{1, N}$ с помощью некоторой импликации принимается в виде:

$$R = \bigcap_{i=\overline{1,N}} R_i^j = \wedge_i R_i^j \qquad (j = 1,\ 2).$$

Подобный подход верен для случая, когда пара (Z_i, C_i) четкая $\forall i$ и множества Z_i представляются как попарно непересекающиеся соседние классы, т.е.

$$\bigcap_{i=\overline{1,N}} R_i^j = \bigcup_{i=\overline{1,N}} Z_i \times \mathrm{C}_i \qquad (j = 1,\ 2).$$

В [8] также предлагается вариант наибольшего решения для $\mu_{\mathrm{C}_i}(c) = \vee_z (\mu_{Z_i}(z) \wedge \mu_{R_i}(z,c))$ следующим образом:

$$\mu_{\hat{R}_i}(z,c) = 1, \text{ когда } \mu_{\mathrm{C}_i}(c) \geq \mu_{Z_i}(z).$$

$\mu_{\hat{R}_i}(z,c) = \mu_{\mathrm{C}_i}(c)$, в остальных случаях, что соответствует брауэровской импликации, выражающей причинность.

В заключение раздела рассмотрим интерпретацию в связи с возникающими прикладными задачами.

Как отмечалось ранее, каждая наблюдаемая структура φ системы S есть результат настройки последней на решение конкретной задачи γ. Пара $(z,\ c)$ входящая в наблюдаемую структуру φ, появляется в результате действия гомоморфизма β (не умаляя общности, пренебрегаем действием гомоморфизма α), который устанавливает соответствие между задачей γ и реализующей ее структурой φ.

Элементы x, виды информационного обмена c и связи оцениваются лингвистически. Спецификации на естественном языке являются единственно возможными, если интерпретировать структуру φ, как малую социальную группу и т.п. Так, к примеру, при социометрическом анализе малой социальной группы «кто вступает во взаимоотношения, с кем вступает во взаимоотношения и каков тип взаимоотношений» специфицируется на вербальном уровне: инструментом измерения является чаще всего специальная анкета, а ответы представителей группы операционанизируется в виде соответствующих вопросов с рядом размытых градаций для ответов. Или другой пример, когда рассматривается задача прогнозирования развития системы в соответствии с заданной целью. Эксперты, дающие оценки типа «какие показатели наиболее важны для представления будущего системы, каковы будут между ними взаимодействия, и в чем они будут выражаться» также дают ответы в лингвистических спецификациях. Задачи подобного рода возникают и при создании производственных систем интеллектуального типа. В частности, если производственная система представляется в виде отдельных технологических участков и решается задача координации их деятельности, то эксперты обычно задают взаимовлияние выходов отдельных технологических участков друг на друга также в лингвистических спецификациях.

Обобщая ситуацию, предположим, что на интервале γ-определенности системы S экспертной группой дается вербальная оценка в лингвистических спецификациях относительно взаимодействующих элементов структуры и видов информационного взаимодействия.

Мнение каждого эксперта представляет собой «точечное» данное в оценке $\varphi_i : Z_i \to \mathrm{C}_i$, иначе $\varphi_i^j : Z_i^j \to \mathrm{C}_i^j \quad j = \overline{1, N}$ - число экспертов.

Мнения экспертов агрегируются в размытые гранулы с помощью кластерного анализа (см. подробнее в последующем, когда для агрегации используется размытый аналог энтропии). Далее из размытых гранул можно получить путем проектирования пары $(Z_i \times \mathrm{C}_i)$. Если отображение φ в обычном смысле существует, то можно подобрать его вид. В противном случае, можно объединяя размытые гранулы $Z_i \times \mathrm{C}_i$ получить размытое отношение R_φ. Выбор того или иного пути представления φ, а именно, либо как четкое представление размытой гранулированной спецификации, либо в виде соответствующего размытого отношения определяется конкретной структурой задачи.

Как отмечалось ранее, для получения математической модели системы с размытыми индивидуальными состояниями использовалось функциональное отношение. Вместе с тем, это не снимает использования в конкретных ситуациях моделей четких отображений.

Использование размытого функционального отношения R_φ на $\mathsf{L} \times \mathsf{C}$ привлекательно и по причине того, что при этом оказывается эквивалентным размыто-значному отображению φ, которое представляет собой обычное отображение L во множество размытых подмножеств множества C (т.к. $\forall z, \forall c, \quad \mu_{R_\varphi}(z, c) = \mu_{\varphi_f(z)}(c)$).

Допустим, что мы работаем со спецификациями, составленными из размытых гранул $(Z_i \times \mathsf{C}_i)$ $i = \overline{1, N}$ представляющих собой «пятно» на прямом произведении. Естественно, что «точность» гранул определяет «точность» установления φ (или отношения R_φ). В связи с этим важно иметь в виду предварительные оценки при формировании гранул посредством кластер-анализа. Предварительные оценки строятся для Z_i и C_i - размытых множеств. Рекомендации предложены в [4].

Оценку Z_i по информационной полноте ложащуюся в основу спецификации рекомендуется проводить через качество покрытия Z_i области определения L. Покрытие

$$\operatorname{cov}\left(\mathsf{L}, Z_i \ \left(i = \overline{1, N}\right)\right) = \inf_{z \in Z} \max_i \mu_{Z_i}(z) = 1 - \sup_{z \in Z}\left(1 - \max_{i = \overline{1, N}} \mu_{Z_i}(z)\right).$$

Иначе покрытие есть дополнение до 1 возможности того, что $\exists$ элемент $z \in \mathsf{L}$, который не принадлежит размытому множеству $\bigcup_{i=\overline{1,N}} Z_i$ (мера невозможности такого события).

Оценку Z_i по информационной согласованности рекомендуется проводить следующим образом: пусть существует φ-отображение, такое $\mathsf{C}_i = \varphi(Z_i)$ и $\mathsf{C}_j = \varphi(Z_j)$ и удовлетворяется *; при этом

$$\inf_{c \in \mathsf{C}} \min\left(\mu_{\mathsf{C}_i}(c), \mu_{\mathsf{C}_j}(c)\right) \geq \sup_{z \in \mathsf{L}} \min\left(\mu_{Z_i}(z), \mu_{Z_j}(z)\right)$$

выражает факт не меньшей согласованности C_i и C_j по сравнению с Z_i, Z_j.

«Согласованность двух размытых множеств оценивает степень возможности, с которой две переменные, априорные значения которых ограничены этими множествами, принимают одно и то же значение».

Указанное неравенство – грубое условие инъективности. В терминах отношения записывается в виде:

$$\text{если } \forall z, \forall c, \quad \mu_R(z, c) = 1 \text{ и } \mathsf{C}_i = R \circ Z_i, \quad C_j = R \circ Z_j.$$

6. Интерпретация нечетких каналов связи

В исходной четкой модели системы S каналы связи $c \in \mathrm{C}$ отожествлялись с пропускаемой через них информацией, т.е. канал $c \in \mathrm{C}$ отожествлялся с информацией, которая могла быть через него пропущена или же с $Inf(c)$. В качестве каналов связи могли выступать показатели или их наборы, другими словами, множества информационных векторов, наименования документов и т.п. Одним словом, в четкой модели интерпретация канала связи не была жесткой. К примеру, для организационной системы, если в качестве ее модели принимается S, в качестве каналов связи могли фигурировать такие типы информации, как «первичная информация», «прогнозная информация», «плановая информация».

Для алгебраической модели нечеткой системы S_f^* интерпретация каналов связи играет важную роль. Рассмотрим возможные подходы в этой связи:

а) Допустим, что в качестве элементов универсума $\mathrm{C} = \{c_1, ..., c_n\}$ выступают некоторые первичные показатели и каждый нечеткий канал является их нечетким подмножеством. Этот подход соответствует пониманию для четкого случая и представляет собой основную интерпретацию нечеткого канала связи, другими словами, здесь для каждой пары $(x, y) \in X \times X$ при отображении $(x, y) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{C}_{xy}$ $\quad \mu(\mathrm{C}_{xy}) = \left\{ \frac{\mu_1}{c_1}, ..., \frac{\mu_n}{c_n} \right\}$ есть нечеткое подмножество множества C. $(\mathrm{C}_{xy} \subset \mathrm{C})$ с функцией принадлежности $\mu(x, y) : \mathrm{C} \to [0, 1]$.

Таким образом, в основном случае, нечеткий канал связи есть нечеткое подмножество I рода на универсуме показателей или исходных четких типов связи.

Теперь допустим, что тип связи в четком случае представляется конечным набором показателей, т.е. подмножествами (четкими) $a_1, ..., a_j, ..., a_m$ на множестве первичных показателей. Принимая подобные конечные наборы показателей в качестве элементов универсума для нечеткого случая, сформируем нечеткий канал связи по принципу, соответствующему подходу в пункте а), а именно:

$$\mathrm{C}_{xy} = \left\langle \frac{\mu_1}{a_1}, ..., \frac{\mu_m}{a_m} \right\rangle,$$

где $a_1,...,a_j,...,a_m$ - четкие подмножества на базе исходных элементов $c_1,...,c_n$. Если, как и ранее $\mu_i \in [0, 1]$ обычные числа, то нечеткий канал имеет нечеткость I рода.

б) Вместе с тем в определенных случаях возможна нечеткость при составлении наборов показателей a_j $\left(j=\overline{1,m}\right)$, выступающих в качестве элементов универсума для нечетких каналов связи. Тогда каждый конечный набор a_j $\left(j=\overline{1,m}\right)$ выступает как нечеткое подмножество универсума $\mathrm{C}=\{c_1,...,c_n\}$. Обозначим их для определенности через $a_{f_1}, a_{f_2},...,a_{f_m}$ $\left(j=\overline{1,m}\right)$. Таким образом,

$$a_{f_j}=\left\{\frac{\mu_1^j}{c_1},...,\frac{\mu_n^j}{c_n}\right\}; \qquad \left(\mu_1^j,...,\mu_n^j\right)\in[0, 1].$$

Сформируем теперь нечеткий канал связи между парой $(x,y)\in X\times X$ в виде $\left\{\dfrac{\mu_1}{a_{f_1}},...,\dfrac{\mu_m}{a_{f_m}}\right\}$.

Рассмотрим пример. Пусть $\mathrm{C}=\{c_1,c_2,c_3,c_4\}$ есть универсум, составленный из элементов c_i $\left(i=\overline{1,4}\right)$, каждый из которых представляет собой первичный показатель. Положим также, что алгебраическая модель интерпретируется в качестве оргсистемы, для которой имеют место 2 нечетких набора показателей, а именно

$$a_{f_1}=\left\{\frac{\mu_1^1}{c_1},...,\frac{\mu_n^1}{c_n}\right\} \text{ и } a_{f_2}=\left\{\frac{\mu_1^2}{c_1},...,\frac{\mu_n^2}{c_n}\right\},$$

причем, для конкретности a_{f_1} есть «информация-прогноз», а a_{f_2} есть «информация-план».

Полагая $a_{f_1}=$ «прогноз» и $a_{f_2}=$ «план» в качестве элементов универсума C, получим нечеткий канал

$$\mu\left(\mathrm{C}_{xy}\right)=\left\langle \frac{\left\langle\dfrac{\mu_1^1}{c_1},...,\dfrac{\mu_n^1}{c_n}\right\rangle}{\text{"прогноз"}=a_{f^1}},\quad \frac{\left\langle\dfrac{\mu_1^2}{c_1},...,\dfrac{\mu_n^2}{c_n}\right\rangle}{\text{"план"}=a_{f^2}} \right\rangle$$

с нечеткостью II рода, т.к. оценки элементов универсума {«прогноз», «план»} даны в виде нечетких значений. Здесь в сравнении мы видим, что для случаев а) и б) оценки элементов универсума заданы в виде обычных чисел из [0, 1], включая модальности типа «часто», «редко» и т.п., интерпретируемые подобным образом (обычными числами).

в) Если же модальности, характеризующие, по мнению экспертов, степени участия элементов универсума задаются в виде нечетких множеств, например, нечеткими числами, то и для исходных показателей мы также получим нечеткий канал связи с нечеткостью II рода, как например,

$$\mu(\mathsf{C}_{xy}) = \left\{ \frac{\text{"часть"}}{\text{"прогноз"}}, \frac{\text{"редко"}}{\text{"план"}} \right\} = \left\langle \frac{\left\langle \frac{\mu_1^1}{u_1}, \ldots, \frac{\mu_n^1}{u_n} \right\rangle}{\text{"прогноз"} = c_1}, \frac{\left\langle \frac{\mu_1^2}{u_1}, \ldots, \frac{\mu_n^2}{u_n} \right\rangle}{\text{"план"} = c_2} \right\rangle$$

для ранее приведенного условного примера. Здесь $u_1, \ldots, u_n \in U$ - универсум, на котором в качестве нечетких подмножеств определены модальности (например, [0, 1] для нечетких чисел).

В приведенных случаях модальности удобно трактовать как степени использования типов каналов связи, которые могут быть представлены как первичные показатели, так и как наборы из этих показателей (включая нечеткие наборы).

В заключение допустим, что для каждой пары $(x, y) \in X \times X$ существует возможность параллельного использования нескольких нечетких каналов связи, которое удобно назвать «нечеткой мультиграфовостью», иначе $\forall (x, y) \in X \times X \quad \exists$ составной нечеткий канал связи: $\left\langle \mathsf{C}_{xy}^1, \ldots, \mathsf{C}_{xy}^k \right\rangle$. Полагая каждый из нечетких каналов связи в качестве некоторой лингвистической переменной C_{xy}^j ($j = \overline{1, k}$) с нечетким значением или для функции принадлежности с $\mu(\mathsf{C}_{xy}^j) = \left\langle \frac{\mu_1^j}{c_1}, \ldots, \frac{\mu_n^j}{c_n} \right\rangle$, где $\mu_1^j, \ldots, \mu_i^j, \ldots, \mu_n^j$; ($i = \overline{1, n}$) являются либо обычными числами, либо нечеткими числами из [0, 1], будем полагать составной нечеткий канал связи в качестве K-арной лингвистической переменной «мультисвязность» с функцией принадлежности нечеткого составного канала связи в виде:

$$\mu(\mathsf{C}_{xy}) = \left\langle \frac{\left\langle \frac{\mu_1^1}{c_1}, \ldots, \frac{\mu_1^n}{c_n} \right\rangle}{\text{связность } 1}, \frac{\left\langle \frac{\mu_k^1}{c_1}, \ldots, \frac{\mu_k^n}{c_n} \right\rangle}{\text{связность } k} \right\rangle = \left\langle \frac{\left\langle \frac{\mu_1^1}{c_1}, \ldots, \frac{\mu_1^n}{c_n} \right\rangle}{\mathsf{C}_{xy}^1}, \ldots, \frac{\left\langle \frac{\mu_k^1}{c_1}, \ldots, \frac{\mu_k^n}{c_n} \right\rangle}{\mathsf{C}_{xy}^k} \right\rangle.$$

Таким образом, интерпретируя нечеткие каналы связи для возможных прикладных ситуаций, мы приходим к выводам:

1. Основная алгебраическая модель в нечетком случае оперирует понятием «нечеткий канал связи», функция принадлежности которого отражает субъективную меру использования четких типов связи $c \in \mathrm{C}$ (элементов универсума), а сам «нечеткий канал» имеет значения в виде нечетких множеств I рода. Для «мультиграфовой» аналогии можно допустить возможность использования ряда нечетких каналов связи (составной нечеткий канал или мультисвязность) $\forall$ пары $(x, y) \in X \times X$.
2. При комплектовании нечетких наборов показателей из универсума типов связей (тип связи – набор показателей или документов), а также случай одновременного использования нескольких нечетких каналов связи каждой пары $(x, y) \in X \times X$ удобно полагать, что связь между (x, y) обеспечивается лингвистической переменной «связность», нечеткие значения которой представляют собой меру субъективного использования наборов или нечетких каналов связи. Здесь имеет место нечеткость II рода при применении модальностей, характеризующих субъективную интенсивность использования нечетких наборов (нечетких каналов связи).

7. Лингвистические описания в нечеткой системе

Принимая во внимание, что алгебраическая модель структурно-нечеткой системы S_f имеет потенциальные возможности применения в различных задачах структурного анализа и синтеза систем, а также в задачах принятия решений, где описание задается на логико-лингвистическом уровне, рассмотрим возможные лингвистические спецификации. Положим, что лингвистические спецификации задаются на уровне элементарных нечетких структур φ системы S_f и в интервале постоянства ее общей структуры из $\mathrm{V}_f(X, \mathrm{C})$ или же когда система «настраивается» на решение некоторой конкретной задачи γ из множества задач Γ. Лингвистическое описание структуры всей системы S_f будет задаваться экспертным путем для каждой пары элементов $(x, y) \in X \times X$. Пусть φ_i некоторое текущее состояние (текущая элементарная структура в дискретный момент i), устанавливающая связь между парой (x, y) элементов $X \times X$, которая, отражая элементарную структуру, задана $\forall (x, y) \in X \times X$ и фиксирована.

Анализ возможных спецификаций целесообразно проводить с учетом структурированности множества типов связей C (В общем случае C является решеткой).

Прежде чем приступить к спецификациям, наряду с вышеизложенными общими соображениями, изучим принципиальные соображения, которые обосновывают форму лингвистических правил-продукций.

Размытость каждого индивидуального состояния системы, рассмотренная ранее, означала, что компонента $x \in X$ «плохо» знает:

- в каких ситуациях она должна у других компонент $y \in X$ запрашивать (передавать) информацию;
- у каких именно компонент следует запросить (связаться) в данной ситуации;
- какую именно информацию следует в данной ситуации запросить (передать) данной компоненте.

Нечеткость ответов на вопросы «когда?», «у кого?» и «что?» порождает соответственно нечеткость в знании системой требующей разрешения задачи $\gamma \in \Gamma$ (задачная нечеткость), нечеткость в виде степени уверенности, какие пары (x, y) связаны при фиксированной задаче $\gamma = \gamma^*$ (нечеткость связности) и нечеткость в передаваемой (запрашиваемой) информации для каждой пары $(x, y) \in X$ при $\gamma = \gamma^*$ (нечеткость информации, и как следствие, - нечеткость канала связи). Нечеткость каждого индивидуального состояния системы можно трактовать и следующим образом. Экспертная группа, реализуя внутрисистемный гомоморфизм α, осуществляет оценку соответствия структуры задаче и степень связности элементов для заданной задачи. Рекомендации экспертной группы носят качественный характер и описываются в лингвистической форме. По этой причине задачная нечеткость, нечеткость связности и нечеткость канала связи порождаются самой экспертной группой.

В силу этого мы рассмотрим общие принципы построения лингвистических спецификации, определяющих экспертное мнение при фиксированных $\gamma = \gamma^*$ о связностях пар $(x, y) \in X \times X$ и требуемой информации, а соответственно и канала связи для ее передачи. Таким образом, рассматриваемая нами задача сводится к установлению посредством лингвистических импликаций причинно-следственной связи между посылками, определяющими уровень знаний (степень уверенности) экспертов о наличии связи между компонентами x и y для заданного φ при фиксированной задаче $\gamma = \gamma^*$ и следствиями, характеризующими необходимую с точки зрения экспертов нечеткость канала связи вследствие нечеткости знаний в запрашиваемой или передаваемой информации.

Следует отметить, что канал связи естественным образом связывается с потенциально пропускаемой через него информацией в рамках информационного универсума I. Требуемая информация для пары (x, y) отожествлена с пропускаемым через канал связи информационным множеством $Inf(c)$, т.е. информационными векторами, представляющими собой и наборы производственных, экономических и т.п. показателей.

В общем виде лингвистическая импликация формируется в виде {. Если связь x с y возможно со степенью уверенности $\mu(x,y)="\langle....\rangle"$, то тип связи c равен $"\langle....\rangle"$.} $\forall(x,y)\in X\times X$.

В краткой форме импликацию будем представлять в виде:

$$\left\{"\text{Если } (x,y)=(x,y)^*, \text{ то } \mathsf{C}=\mathsf{C}^*"\right\} \ \forall(x,y)\in X\times X$$

Таким образом система продукций, описывающая экспертные мнения (для каждого φ), в качестве посылок имеет нечеткие значения (степень возможности или достоверности) лингвистической переменной «связность», а в качестве заключений – нечеткие значения лингвистической переменной «канал связи».

В качестве замечания отметим, что в приведенной выше импликации посылочную часть можно заменить на эквивалентную форму, а именно:

$$\left\{"\text{Если } \varphi=\varphi^*, \text{ то } \mathsf{C}=\mathsf{C}^*"\right\} \ \forall(x,y)\in X\times X .$$

Последняя запись эквивалентна предшествующей по причине того, что пара (x,y) соответствует φ и в обоих случаях задается нечеткое значение степени уверенности этого состояния.

Нечеткие значения лингвистических переменных = «связность» и «канал связи» могут изменяться в соответствии с динамикой системы и соответствующей перестройкой ее структур, нацеливаемых на решение стоящих перед системой задач $\gamma\in\Gamma$.

Отметим также и тот факт, что перестройка структур, определяемая задачами $\gamma\in\Gamma$, приводит к тому, что приведенной лингвистической спецификации может предшествовать другая, которая как раз и отражает динамику смены задач, а именно: {«Если степень уверенности (истинности) в том, что перед системой стоит задача γ есть $\mu(\gamma)$, то степень уверенности в связности x с y равна $\mu(x,y)$»} $\forall\gamma\in\Gamma$ и $(x,y)\in X\times X$. Здесь в качестве лингвистической переменной в посылке выступает «Задача». В краткой форме импликация представима в виде:

$$\left\{"\text{Если } \gamma=\gamma^*, \text{ то } (x,y)=(x,y)^*"\right\} \text{ или что эквивалентно}$$

$$\left\{"\text{Если } \gamma=\gamma^*, \text{ то } \varphi=\varphi^*"\right\} \ \forall\gamma\in\Gamma \text{ и } (x,y)\in X\times X .$$

Таким образом, если импликация $\left\{"\text{Если } \gamma=\gamma^*, \text{ то } \varphi=\varphi^*"\right\}$ участвует ли в решении очередной задачи $\gamma=\gamma^*$ нечеткое индивидуальное состояние φ и какова степень этого участия $\varphi=\varphi^*$, то импликация: $\left\{"\text{Если } \varphi=\varphi^*, \text{ то } \mathsf{C}=\mathsf{C}^*"\right\}$ отвечает на вопрос: «каким должен быть нечеткий канал связи, $\mathsf{C}=\mathsf{C}^*$ информационно обеспечивающий нечеткую структуру или индивидуальное состояние $\varphi=\varphi^*$?». Естественно интерпретировать, что пара импликаций подобного типа характеризуют работу экспертной группы нечеткой системой, осуществляющей «внутреннюю» (внутрисистемную) постройку на успешное решение стоящих перед системой задач. Другими словами, подобная интерпретация равносильна установления воздействия одного из параметров – гомоморфизма α, внесенного в определение нечеткой системы и представляющего собой влияние задач на выбор необходимых для их решения подмножеств множества M всех состояний системы: $\alpha : \Im \to \mathsf{H}(\tilde{\mathsf{M}})$.

Особо отметим, при описании алгебраической модели размытой системы мы не рассматривали возможность размывания гомоморфизма α, мотивируя это наличием у системы «хорошо организованной» экспертной группы, обладающей высокой коллективной надежность в выработке рекомендаций по перестройке состояний системы под влиянием задачи. Вместе с тем, не исследуя теоретической возможности размывания внутрисистемного гомоморфизма α, следует принять во внимание, что рекомендации экспертной группы будут носить логико-лингвистический характер, т.е. будут лингвистическими правилами.

Следовательно их знания-рекомендации будут описаны в нечеткой форме. Такое представление приобретает особо важное значение при создании экспертной системы (э.с.), призванной «заменить» экспертную группу и реализующей функции внутрисистемного гомоморфизма α.

Далее, полагая, что задачи, стоящие перед системой известны, т.е. в данный момент задана фиксированная задача $\gamma = \gamma^*$, рассмотрим особенности формирования импликаций $\{$"Если $(x, y) = (x, y)^*$, то $\mathsf{C} = \mathsf{C}^*$"$\}$ или, что эквивалентно $\{$"Если $\varphi = \varphi^*$, то $\mathsf{C} = \mathsf{C}^*$"$\}$.

Внимание к этим импликациям, при фиксированных $\gamma = \gamma^*$, предопределяется прикладными аспектами основной алгебраической модели, поскольку многие практические задачи сведется к применению решений при фиксированных множеств состоит 4 – $\{4\} \subset \mathsf{V}(X, \mathsf{C})$. Иначе, при «мемориальных фотографиях» структуры исследуемой нечеткой системы S_f.

Мы изучим удобные с практической точки зрения спецификации, обоснуем правила принятия решений на их основе и обсудим их информационное обеспечение.

Итак, рассматривается импликация:

$\{$"Если $(x, y) = (x, y)^*$, то $\mathsf{C} = \mathsf{C}^*$"$\}$ или в эквивалентной форме,

$\{$"Если $\varphi = \varphi^*$, то $\mathsf{C} = \mathsf{C}^*$"$\}$, $\forall (x, y) \in X \times X$.

Полагаем следующие случаи:

1. Пусть множества C в простейшем случае представляет собой двухэлементное множество, состоящее из элементов 0 и 1, т.е. $\mathsf{C}=\{0,\ 1\}$. Импликация переписывается к виду:
$\{$"Если $\exists(x,y)=(x,y)^*$, то $\mathsf{C}=\mathsf{C}^*=1$"$\}$ (в противном случае: $\mathsf{C}=0$) $\forall(x,y)\in X\times X$.
Следствием такого упрощения является то, что элементарная структура φ в этом случае есть либо ребро из x в y, либо не связанная пара вершин, а текущие структуры M нечеткой системы $\mathsf{V}(X,\mathsf{C})$ есть обычные графы.
2. Пусть по-прежнему $\mathsf{C}=\{0,\ 1\}$, однако, если $\exists$ из x в y ребро, то оно «взвешено» субъективно числами из [0,1]. Импликация переписывается к виду:
$\{$"Если $\exists(x,y)=(x,y)^*$, то $\mathsf{C}=\mathsf{C}^*=1$"$\}$, где $\mu(\mathsf{C}^*)\in[0{,}1]$ выражают системы достоверности или уверенности обычные числа из [0,1]; $\forall(x,y)\in X\times X$.
Следствием данного упрощения является то, что элементарная структура φ в этом случае есть либо разрешенное числом из [0, 1] ребро из x в y, либо не связанная пара вершин ($\mu(\mathsf{C})=0$), а текущие структуры M из $\mathsf{V}(X,\mathsf{C})$ есть нечеткие графы.
3. Положим, что множество C является линейно-упорядоченным состоит из элементов, принадлежащих R^+, т.е. $C=\{r_1,\ r_2,...,r_n\}$, где r_i действительное число; $(i=\overline{1,n})$; $r_i\geq 0$. Здесь R^+ (множество положительных, действительных чисел) полагается конечным и обычно называется множеством «весов». Элементы r_i $(i=\overline{1,n})$ из R^+ полагаются измененными в порядковой шкале. Импликация переписывается к виду:
$\{$"Если $\exists(x,y)=(x,y)^*$, то $c=r_i^*$ $(i=\overline{1,n})$"$\}$ $\forall(x,y)\in X\times X$.
Следствием такого понимания является представление об элементарной структуре φ как о взвешенном ребре из x в y, а текущие структуры $\mathrm{M}\subset\mathsf{V}(X,\mathsf{C})$ оказываются взвешенными графами.
В общем случае множестве $\mathsf{C}=\{c_1,...,c_n\}$, интерпретируемое как множество типов связи C_i $(i=\overline{1,n})$ является решеткой, т.е. частично упорядоченное множество с определенными на нем операциями взятия наименьшей верхней грани $\vee$ и наибольшей нижней грани $\wedge$, которые связаны с отношением частичной упорядоченности «$\geq$» следующим образом: $\forall c_1,c_2\in C$, положим, что $c_1\leq c_2$, если $c_1\wedge c_2=c_1$ и $c_1\vee c_2=c_2$.
Интерпретация типов связи, как показано выше, позволяет полагать, что неравенство $c_1\preccurlyeq c_2$ означает теоретико-множественное включение

$Inf(c_1) \subseteq Inf(c_2)$. Подобная интерпретация и позволяет обеспечить осуществить требование дистрибутивности решетки C: частично упорядоченное множество $\langle \mathsf{C}; \preccurlyeq \rangle$ реализована как подмодель частично упорядоченного множества $\left\langle 2^I; \subseteq \right\rangle$ и, если C окажется недистрибутивной, мы можем перейти от C к подрешетке, порожденной множеством C в бумане $\left\langle 2^I; \cup; \cap \right\rangle$, которая уже дистрибутивна.

4. Положим, что C есть решетка: $\mathsf{C} = \{c_1, ..., c_n\}$, $\left(i = \overline{1, n}\right)$ следует отметить, что в этом случае, как показывает опыт, эксперты, формируя правила, стремятся задать заключительную часть не в виде нечеткого множества лингвистического решения: «канал связи C», а на уровне их значений при поточечном представлении нечеткого множества на элементах универсума C (т.е. на типах связи $c_1, ..., c_n$). Другими словами, заключительная часть правила, задаваемого экспертом, сразу формируется им через субъективные значения функции принадлежности $\mu(\mathsf{C})$ на точках базового множества и импликация представляется в виде:

$$\{\text{"Если } \exists (x, y) = (x, y)^*, \text{ то } c_1 \text{ с достоверностью } \mu_1, ..., c_n \text{ с достоверностью } \mu_n\text{"}\} \quad \forall (x, y) \in X \times X$$

Здесь: $\mu_1, ..., \mu_n$ - обычные числа из [0, 1]; $c_1, ..., c_n$ - типы каналов связи, играющие роль элементов универсума. В этом случае нечеткий канал связи C_{xy} представится следующей функцией принадлежности:

$$\mu\left(\mathsf{C}_{xy}\right) = \left\langle \frac{\mu_1}{c_1}, ..., \frac{\mu_n}{c_n} \right\rangle.$$

Следствием данного представления является то, что элементарная структура φ выступает как ребро из x в y, нечетко взвешенное на элементах универсуме $c_1, ..., c_n$ - типах связи.

5. Пусть, как и в п.4 C есть решетка $\mathsf{C} = \{c_1, ..., c_n\}$. Импликации представлены в форме:

$$\{\text{"Если } (x, y) = (x, y)^*, \text{ что редко } c_1, ..., \text{ часто } c_n\text{"}\} \quad \forall (x, y) \in X \times X$$

Здесь каждый элемент универсума (типа связи) c_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ оценен посредством модальностей, причем возможно, что взамен $\{\text{"редко } c_1, ..., \text{ часто } c_n\text{"}\}$, употребляется {«мало»,…, «много»}, либо {«слабо»,…, «сильно»} и т.п.

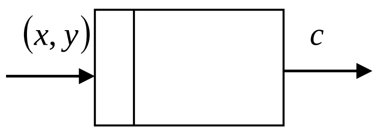
В целом, «нормировка» элементов универсума осуществляется параметрами, в возможной мере характеризующими сравнимость и предпочтительность экспертов по использованию элементов универсума $c_1,\ldots,c_n$.

Нечеткий канал связи C_{xy} в этом представится, к примеру, следующей функцией принадлежности:

$$\mu(\mathrm{C}_{xy}) = \left\langle \frac{\mu_1}{\text{слабая } c_1}, \ldots, \frac{\mu_n}{\text{слабая } c_n} \right\rangle.$$

В этом случае мы получаем представление об элементарной структуре как о ребре из x в y, нечетка взвешенном на элементах $c_1,\ldots,c_n$, причем нечеткость относится ко II роду.

Таким образом, в наиболее естественных для исследуемой нечеткой системы ситуациях (C-решетка) мы получаем от экспертов лингвистические правила с нечеткостью I рода (пункт 4), либо II рода (пункт 5) в описании нечеткого канала связи. Рассмотренные нечеткие импликации могут представлены в удобной структурной форме [11, 12].



Здесь: R_φ - нечеткое отношение «вход-выход»; «$\circ$» - знак «максиминной» операции. При этом $C = (x, y) \circ R_\varphi \quad \forall (x, y) \in X \times X$ или $c = (x, y) \circ [(x, y) \to c]$.

Построение нечеткого отношения R_φ определяется конкретным видом логического управления и известными требованиями, сформулированными к эффективности нечеткой импликации.

В настоящей работе с этой целью используется логика Геделя или же импликация Мамдани. В соответствии с композиционным правилом вывода получим значение для функции принадлежности выхода

$$\mu'(c_{xy}) = \max_{(x,y)\in X\times X} \min_{c\in C} \left\{ \mu'(x, y),\ \mu_{R_\varphi}[(x, y), c] \right\}.$$

8. Пример

Рассматриваются 3 социальные группы в сети Интернет: Пользователи (x_1), Авторы (x_2) и Правообладатели (x_3), т.е. $X = (x_1, x_2, x_3)$.

Множество задач (целей), стоящих перед системой: $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, где:

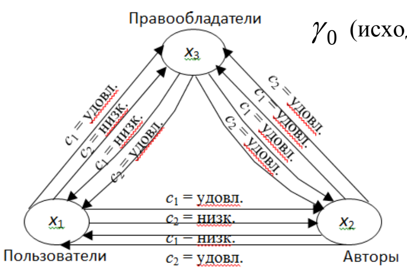
γ_1 - свободное использование объектов в Интернете (введение исключения из авторского права в Интернете), коротко «свободное использование»;

γ_2 - свободное использование объектов в Интернете с правом получения вознаграждения (введение дополнительного ограничения авторского права в Интернете), коротко «принудительная лицензия»;

γ_3 - ужесточение требований к использованию объектов в Интернете (дополнительные требования и санкции в авторско-правовом законодательстве), коротко «ужесточение».

Наблюдения осуществляется экспертами по двум показателям взаимодействия c_1 и c_2 (c_1 = уровень обеспечения авторского права в Интернете, коротко «авторское право» и c_2 = уровень открытости (доступности) Интернет, коротко «открытость», т.е. $C=(c_1, c_2)$ и определяется лингвистически на множестве: {«низкое», «удовлетворительное», «высокое»}).

Тем самым нечеткими каналами связи выступают оценка показателей «авторское право» и «доступность» в нечеткой форме. При задаче γ_0 (исходная ситуация) совмещенный граф наблюдений (полный граф = универсальное множество структур) будет:



γ_0 (исходная ситуация) $\longrightarrow x_1 \to x_3$: c_1 = удовл., c_2 = низк.

$\longrightarrow x_3 \to x_1$: c_1 = низк., c_2 = удовл.

$\longrightarrow x_1 \to x_2$: c_1 = удовл., c_2 = низк.

$\longrightarrow x_2 \to x_1$: c_1 = низк., c_2 = удовл.

$\longrightarrow x_2 \to x_3$: c_1 = удовл., c_2 = удовл.

$\longrightarrow x_3 \to x_2$: c_1 = удовл., c_2 = удовл.

Смена исходной ситуации на задачи $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ определяется приводимыми взаимодействиями.

γ_1 = «свободное использование» $\longrightarrow x_1 \to x_3$: c_1 = высок., c_2 = высок.

$\longrightarrow x_3 \to x_1$: c_1 = низк., c_2 = высок.

$\longrightarrow x_1 \to x_2$: c_1 = высок., c_2 = высок.

$\longrightarrow x_2 \to x_1$: c_1 = низк., c_2 = высок.

$\longrightarrow x_2 \to x_3$: c_1 = удовл., c_2 = удовл.

$\longrightarrow x_3 \to x_2$: c_1 = удовл., c_2 = удовл.

γ_2 = «принудительная лицензия» $\longrightarrow x_1 \to x_3:\ c_1 = \text{удовл.},\ c_2 = \text{удовл.}$

$\longrightarrow x_3 \to x_1:\ c_1 = \text{низк.},\ c_2 = \text{высок.}$

$\longrightarrow x_1 \to x_2:\ c_1 = \text{удовл.},\ c_2 = \text{удовл.}$

$\longrightarrow x_2 \to x_1:\ c_1 = \text{высок.},\ c_2 = \text{удовл.}$

$\longrightarrow x_2 \to x_3:\ c_1 = \text{удовл.},\ c_2 = \text{высок.}$

$\longrightarrow x_3 \to x_2:\ c_1 = \text{удовл.},\ c_2 = \text{высок.}$

γ_3 = «ужесточение» $\longrightarrow x_1 \to x_3:\ c_1 = \text{низк.},\ c_2 = \text{низк.}$

$\longrightarrow x_3 \to x_1:\ c_1 = \text{высок.},\ c_2 = \text{удовл.}$

$\longrightarrow x_1 \to x_2:\ c_1 = \text{низк.},\ c_2 = \text{низк.}$

$\longrightarrow x_2 \to x_1:\ c_1 = \text{удовл.},\ c_2 = \text{низк.}$

$\longrightarrow x_2 \to x_3:\ c_1 = \text{высок.},\ c_2 = \text{удовл.}$

$\longrightarrow x_3 \to x_2:\ c_1 = \text{высок.},\ c_2 = \text{удовл.}$

Моделирование системы осуществляется посредством приводимого в предшествующих разделах аппарата.

Литература

1. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем. Математические основы. М., Мир, 1978.
2. Садовский Л.Е. и др. Вопросы моделирования иерархических систем. Изв. АН СССР, «Техническая кибернетика», №2, 1977.
3. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М., «Наука», 1976.
4. Биргкоф Г. Теория решеток. М., «Наука», 1984.
5. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. “Fuzzy sets and systems”, 1978, pp.3-28.
6. Zadeh L.A. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. “Fuzzy sets and systems”, Vol.90, 1997, pp.111-128.
7. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М., Наука, 1981.
8. Дюбуа Д., Прад А. К анализу и синтезу нечетких отображений. Нечеткие множества и теория возможностей. Под ред. Р.Ягера, М., «Радио и связь», 1986.
9. Dubois D. and Prade H. Possibility theory. In R. Meyers, editor Encyclopedic of Complexity and Systems Science. Springer, 2009, pp.6927-6939.
10. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств, М., «Радио и связь», 1982.

11. Под ред. Поспелова Д.А. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М., Наука, 1986.
12. Борисов А.Н. и др. Принятие решений на основе нечетких моделей. Рига, «Зинатне», 1990.

Qeyri səlis strukturlu sistemlər üçün cəbri modellər

K. İmanov

XÜLASƏ

Dəqiq ləkələrə əsaslanan struktur sistemləri anlayışı daxil edilmişdir. Onun tətbiqi məsələlərlə təyin olunan yayğınlaşması üsulu tədqiq edilmişdir. Yayğınlaşmış individual hallara malik struktur universal sistem anlayışı əsaslandırılmışdır. Yayğınlaşmış cəbri modelin strukturlaşdırılması üsulu verilmişdir. Bu üsulun modifikasiyaları analiz edilmişdir. Əsas qoyuluşdan alınan bəzi tətbiqi məsələlər öyrənilmişdir.

Açar sözlər: struktur-yayğınlaşmış sistem, struktur individual sistem, münasibətlərin yayğınlaşmış inikası, qraflar.

Algebraic models for the structural-fuzzy systems

K.S. Imanov

ABSTRACT

On the base of script spot-based algebraic model the definition of structural system is introduced. The method of its fuzzyfication is investigated defined by the applied problems and are based on the definition of structural universal system of fuzzificated individual states. A method is developed for the structurazation of the fuzzificated algebraic model and its modification is analysed. Some applied problems are considered following from main formulation.

Keywords: stuctural-fuzzificated system, structural individual system, fazzificated map of the relations, graphs.